

# OVERENIE STATICKÝCH A DYNAMICKÝCH VÝPOČTOV V MKP (FEM) V NADVÄZNOSTI NA NEXIS A SCIA.ESA PT

Ing. Daniel Bukov, autorizovaný inžinier, Bratislava

Ing. Daniel Bukov OK TEAM , Budatínska 31, 851 05 Bratislava

## 1 ÚVOD

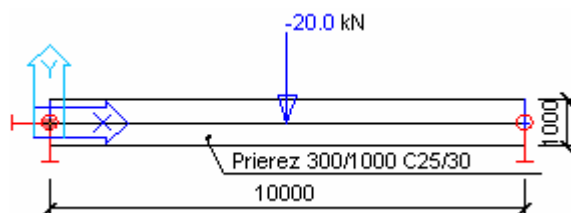
Overenie výsledkov výpočtu je dôležitou časťou výpočtu konštrukcií, ktorá nemusí byť súčasťou predkladanej dokumentácie ale istým spôsobom potvrdzuje správnosť predpokladov používaných pri tvorbe výpočtového modelu. V návaznosti na výpočty s využitím numerických metód akou je aj metóda konečných prvkov (MKP alebo anglicky FEM), využívanou v programoch ESA PT a NEXIS, je overenie výsledkov ešte významnejšie. V overení nejde kontrolu, ako je to pri použití analytických metód, kde na základe stanovenej prakticky pevnej výpočtovej schémy - postupu je potrebná kontrola numerických výsledkov. Pri použití MKP výsledky závisia od použitého výpočtového modelu, ktorý je aproximáciou riešenej konštrukcie, výsledky závisia od použitého typu prvku a od hustoty delenia.

## 2 JEDNODUCHÉ KONŠTRUKCIE

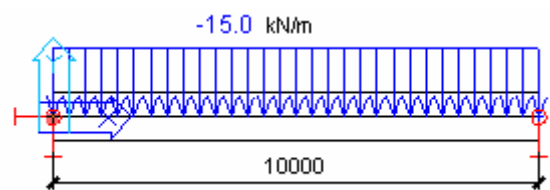
### 2.1 Vplyv diskretizácie oblasti na presnosť výsledku

#### 2.1.1 Jednoduchý nosník

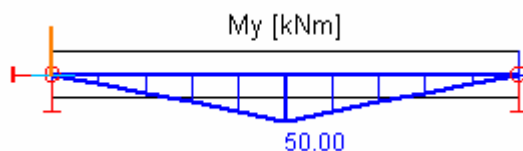
Na príklade jednoduchého nosníka riešeného pomocou prútových prvkov a plošných prvkov s rôznym delením poukážeme na závislosť výpočtu o hustoty delenia .



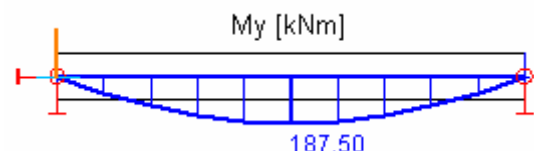
Obr.1 Výpočtový model –prút ZS.1



Obr.2 Výpočtový model –prút ZS.2

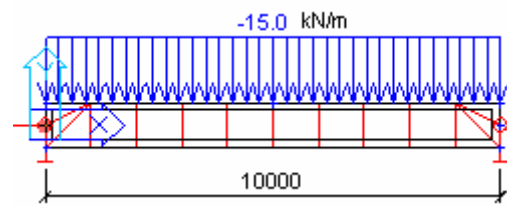
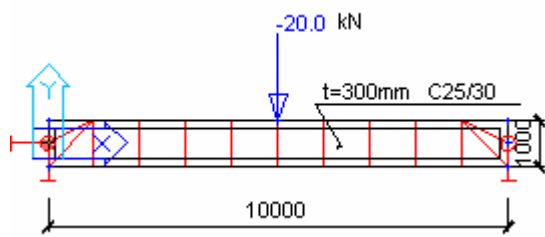


Obr.3 Ohybový moment pre ZS1  
Priehyb v strede rozpätia 0.53 mm



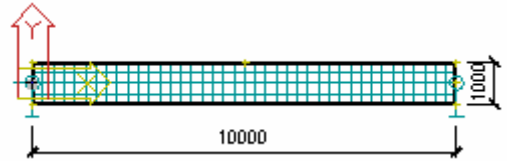
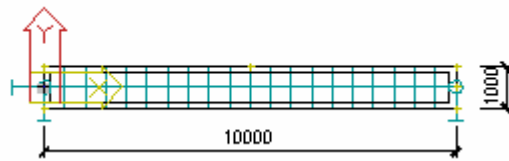
Obr.4 Ohybový moment pre ZS2  
Priehyb v strede rozpätia 2.46 mm

Nosník modelovaný doskostenovými prvkami



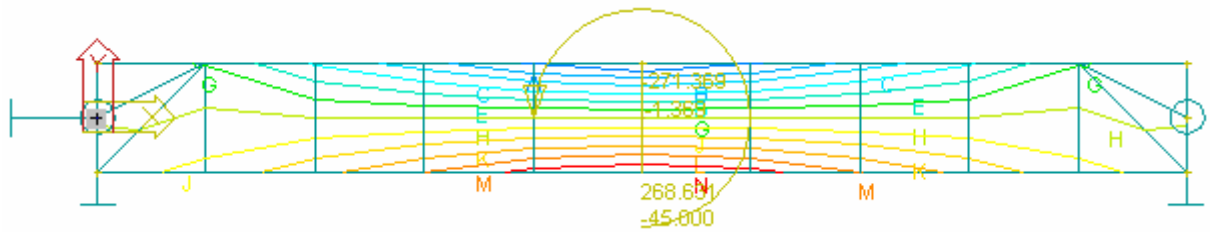
Obr.5 Výpočtový model 1–doskostena ZS1

Obr.6 Výpočtový model 1–doskostena ZS2

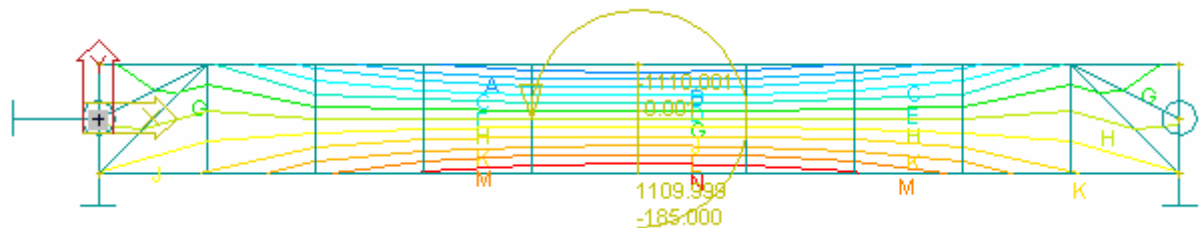


Obr.7 Výpočtový model 2

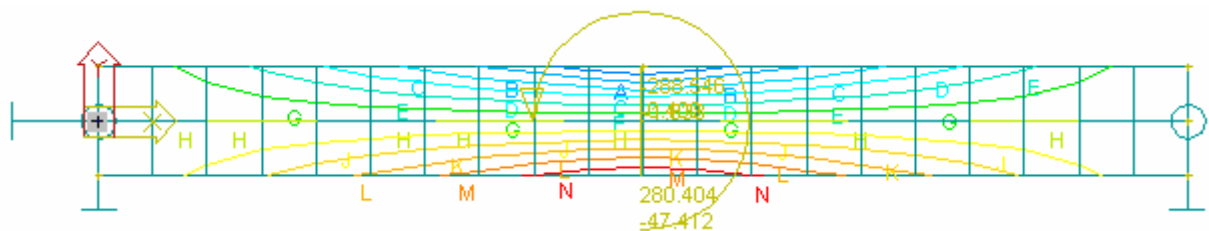
Obr.8 Výpočtový model 3



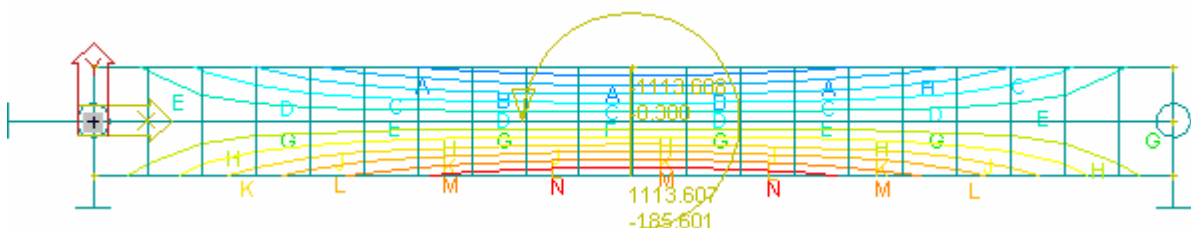
Obr.9 Výpočtový model 1 - Normálové sily a ohybový moment v strede rozpätia ZS1  
Priehyb v strede rozpätia 0.509 mm



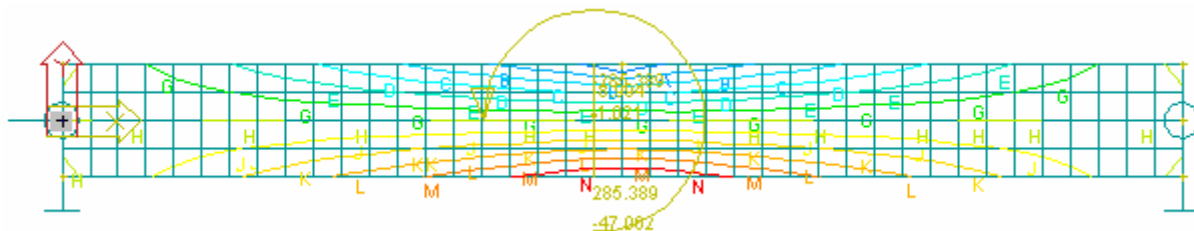
Obr.10 Výpočtový model 1 Normálové sily a ohybový moment v strede rozpätia ZS2  
Priehyb v strede rozpätia 2.735 mm



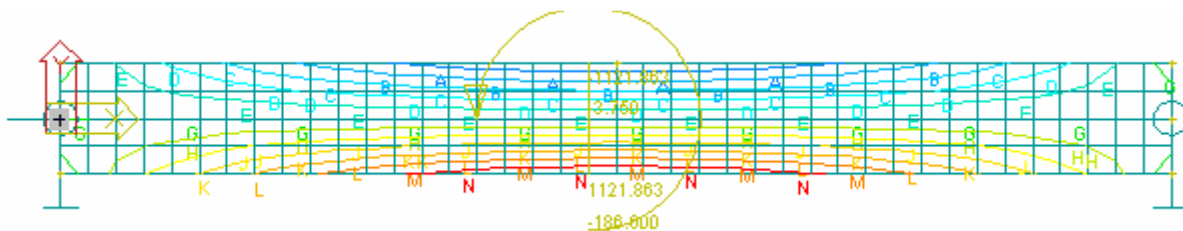
Obr.11 Výpočtový model 2 Normálové sily a ohybový moment v strede rozpätia ZS1  
Priehyb v strede rozpätia 0.52 mm



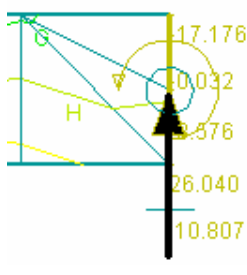
Obr.12 Výpočtový model 2 Normálové sily a ohybový moment v strede rozpätia ZS2  
Priehyb v strede rozpätia 2.44 mm



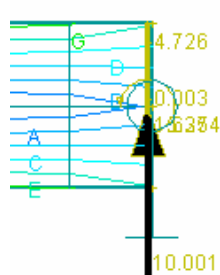
Obr.13 Výpočtový model 3 Normálové sily a ohybový moment v strede rozpätia ZS1  
Priehyb v strede rozpätia 0.522 mm



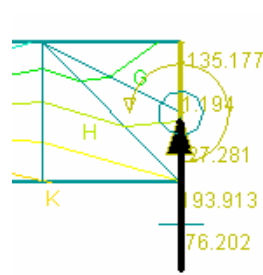
Obr.14 Výpočtový model 3 Normálové sily a ohybový moment v strede rozpätia ZS2  
Priehyb v strede rozpätia 2.456 mm



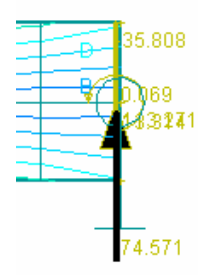
Obr.15 Model 1  
Priečna sila ZS1



Obr.16 Model 2  
Priečna sila ZS1



Obr.17 Model 1  
Priečna sila ZS2



Obr.18 Model 2  
Priečna sila ZS2

### 2.1.1.1 Vyhodnotenie rozdielov vo výsledkoch

Kritériom pre posúdenie je odchýlka od riešenia prútovým modelom

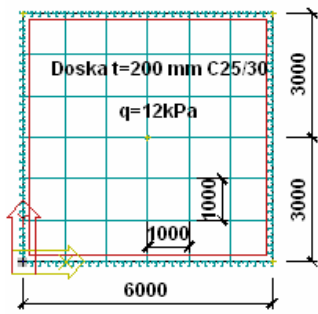
Zaťažovací stav Veličina	Prútový model model	Model 1	Model 2	Model 3
Priehyb ZS1 [mm]	0.53/	0.509/	0.52/	0.522/
/rozdiel v %	0%	-3.96%	-1.89%	-1.5%
Vlastná frekvencia	12.995 Hz	13.126Hz/	12.996Hz/	12.963 Hz
/rozdiel v %		+1.08%	+0.008%	-0.263%
Priehyb ZS2 [mm]	2.46/	2.735/	2.44/	2.456/
/rozdiel v %	0%	+11.12%	-0.83%	-0.163%
Vlastná frekvencie	9.273 Hz	9.391 Hz	9.312 Hz	9.293 Hz
Ohybový moment My ZS1 [kNm]	50.0/	45.0/	47.41/	47.06/
/rozdiel v %	0%	-10%	-5.18%	-5.88%
Ohybový moment My ZS2 [kNm]	187.5/	185.0/	185.600/	186.601/
/rozdiel v %	0%	-1.333%	-1.013%	-1.88%
Priečna sila Nxy ZS1 [kN]	10.0/	10.807/	10.0/	8.349/*)
/rozdiel v %	0%	+8.07%	0.0%	-16.51%
				10.09/**)
				0.9%
Priečna sila Nxy ZS2 [kNm]	75.0/	76.02/	74.671/	62.304/*)
/rozdiel v %	0%	+1.36%	-0.439%	-16.928%
				70.712/**)
				-5.17%

\*) Rez 13 mm za podporou   \*\*) 540 mm za podporou

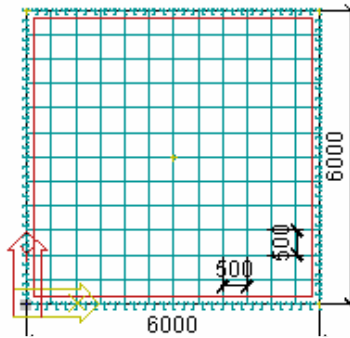
Z hore uvedenej tabuľky vyplýva závislosť výsledkov výpočtu od spôsobu diskretizácie úlohy. Ak sú nosníkové prvky z nejakých dôvodov modelované doskostenovými prvkami je možné očakávať rozdiely vo výsledkoch do 10%. Presnosť výsledkov závisí od hustoty delenia, aproximovanej vnútornej sily ale aj od spôsobu zaťaženia konštrukcie. Na jednoduchom príklade sme sa snažili demonštrovať problematiku delenia a zaťaženia. Pri výpočte vlastných frekvencií sa prejavila malá odlišnosť pri použití rôznych výpočtových modelov a rôznej polohy hmôt.

Výpočty v programe NEXIS potvrdili dobrú zhodu medzi výsledkami pri hrubom a jemnejšom delení oblasti na konečné prvky.

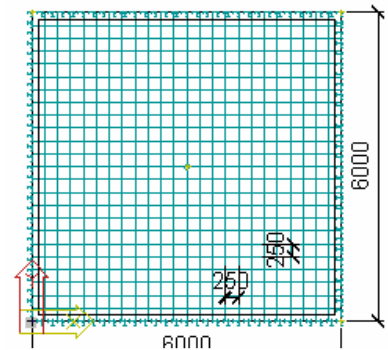
## 2.1.2 Lokálne podopretá doska



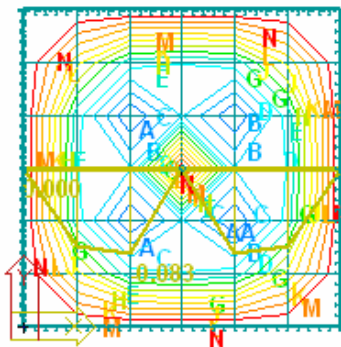
Obr. 19 Výpočtový model 3



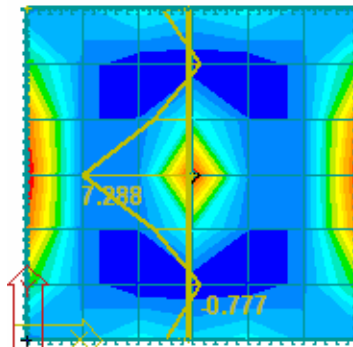
Obr. 20 Výpočtový model 4



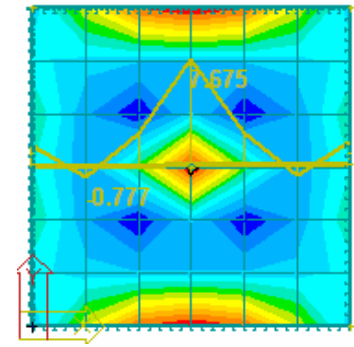
Obr. 21 Výpočtový model 5



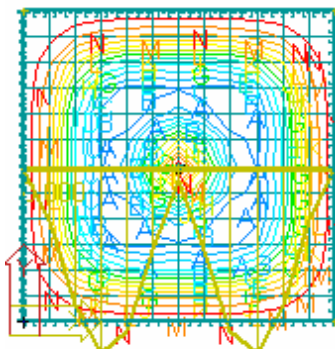
Obr. 22 Model 3 Priehyb



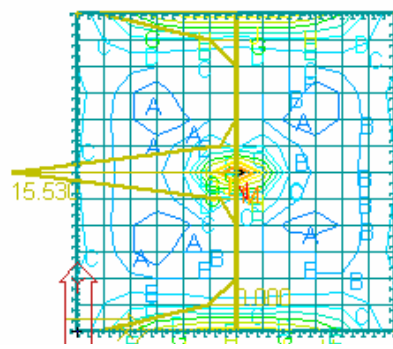
Obr. 23 +MxD



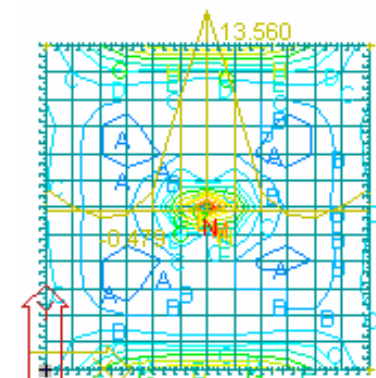
Obr.24 +MyD



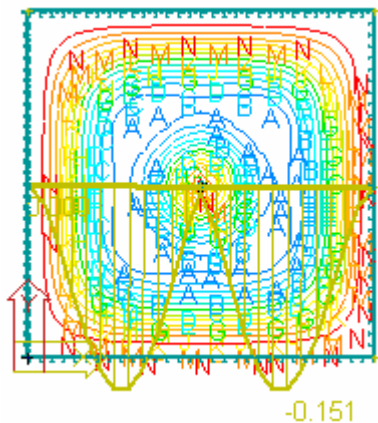
Obr. 25 Model 4 Priehyb



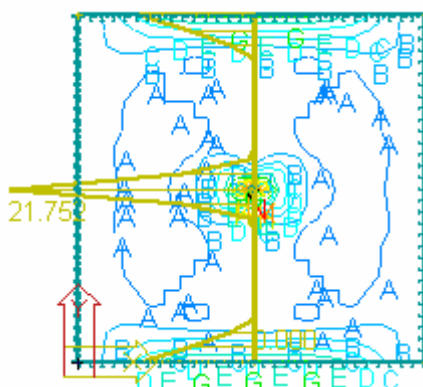
Obr. 26 +MxD



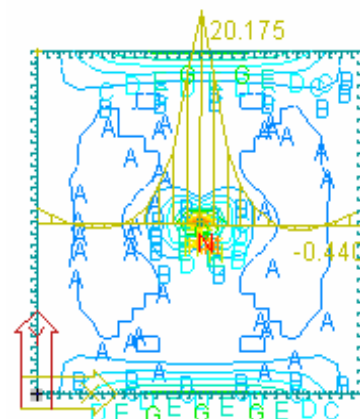
Obr.27 +MyD



Obr. 28 Model 5 Priehyb



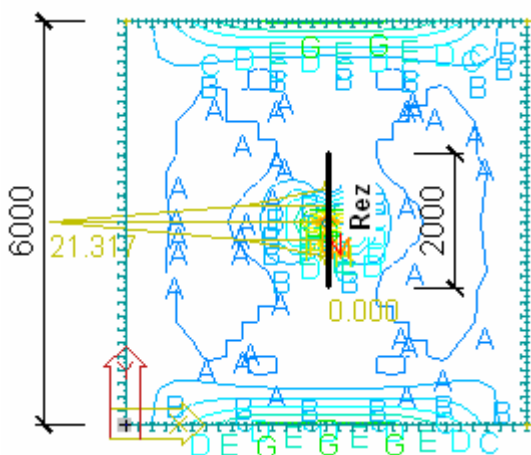
Obr. 29 +MxD



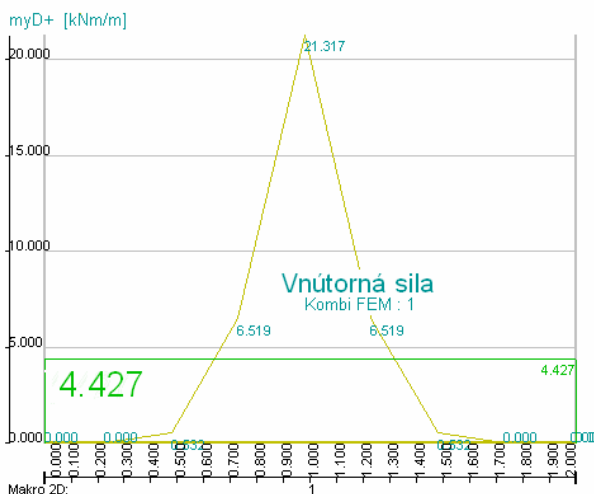
Obr.30 +MyD

Na príklade lokálne podopretej dosky poukazujeme na vplyv hustoty delenia dosky na výsledné vnútorné sily. V prípade lokálnych podopretí ide hlavne o singularity, ktoré na prvý pohľad skresľujú výsledky výpočtov. Dimenzovanie konštrukcií musí v tomto prípade vychádzať z priemerných veličín získaných v istom úseku – reze časti konštrukcie ako dokumentujeme ďalej.

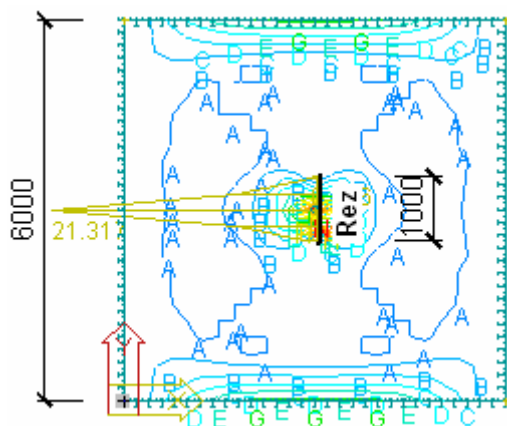
V prípade doskostonových konštrukcií, kde sa často vyskytujú singularity, je možný postup podľa Obr.31-34. Pri použití rezov samozrejme priemerná hodnota vnútornej sily v reze závisí od dĺžky a polohy rezu. V každom prípade hodnota dimenzačnej veličiny vystihuje skutočné pôsobenie konštrukcie a vyhýba sa použitiu singulárnych hodnôt, ktoré vedú k nehospodárnym návrhom. Pri dimenzovaní železobetónových konštrukcií je možné použiť viac rezov a tým odstupňovať v rozumnej miere vystuženie prierezu. Pri posúdení ocelových konštrukcií resp. ich uzlov je možné spriemerovať niektoré z napätí a použiť priemernú hodnotu pri posúdení.



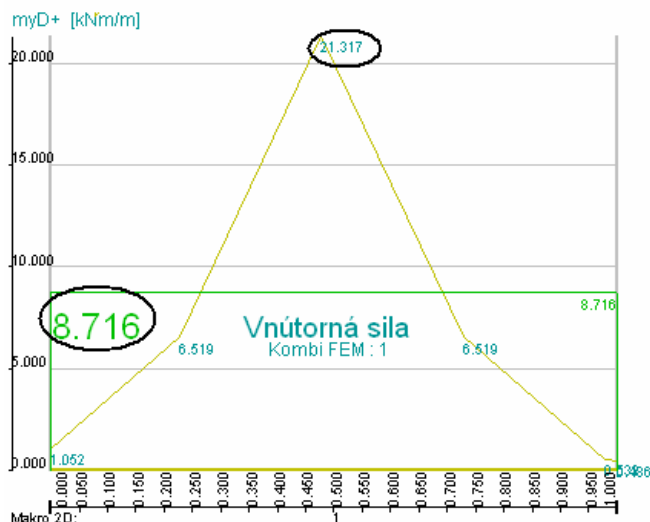
Obr. 31 Rez dĺžky 2m



Obr. 32 Priemerná vnútorná sila +MyD



Obr. 33 Rez dĺžky 1m



Obr. 34 Priemerná vnútorná sila +MyD

### 3 ZLOŽITÉ KONŠTRUKCIE

Náročnosť overovania výsledkov výpočtov s využitím MKP so zložitou konštrukciou výrazne stúpa. Overenie výsledkov je možné alternatívnym výpočtom na zjednodušenom výpočtovom modeli alebo overením niektorých parametrov konštrukcie. Každý detail konštrukcie nie je možné a prakticky ani potrebné nezávisle preverovať. Celkové pôsobenie konštrukcie ako aj pôsobenie rozhodujúcich uzlov konštrukcie je nevyhnutné overiť nezávislým posúdením. Pri overovaní nie je ani tak dôležité vyžadovať vysokú zhodu dosiahnutých výsledkov ako kvalitatívne zhodnotiť výsledky.

Pri použití MKP je často obtiažne posúdenie stability konštrukcií ako celku (stabilita základov proti preklopeniu a pošmyknutiu, stabilita konštrukcií s ohľadom na imperfekcie a pod.)

#### 3.1 Posúdenie stability základu pod technologickou konštrukciou

Technologické konštrukcie na rozdiel od nosných konštrukcií budov majú často zložitejší tvar, značne rozdielne zaťaženia od účinkov technológie pôsobiace v rozličných smeroch. Overenie stability základových konštrukcií je pre takéto konštrukcie pomerne zložitou úlohou. Pre riešenie odozvy konštrukcie je potrebné posudzovať okrem bežných zaťažovacích stavov minimálne tri zaťažovacie stavy t.j. od prázdnych aparátov, od skúšky a prevádzky zariadenia. Rozdiely účinkov môžu byť niekedy aj niekoľko násobné. Ako príklad uvediem základ pod technologické aparáty v rafinérii.

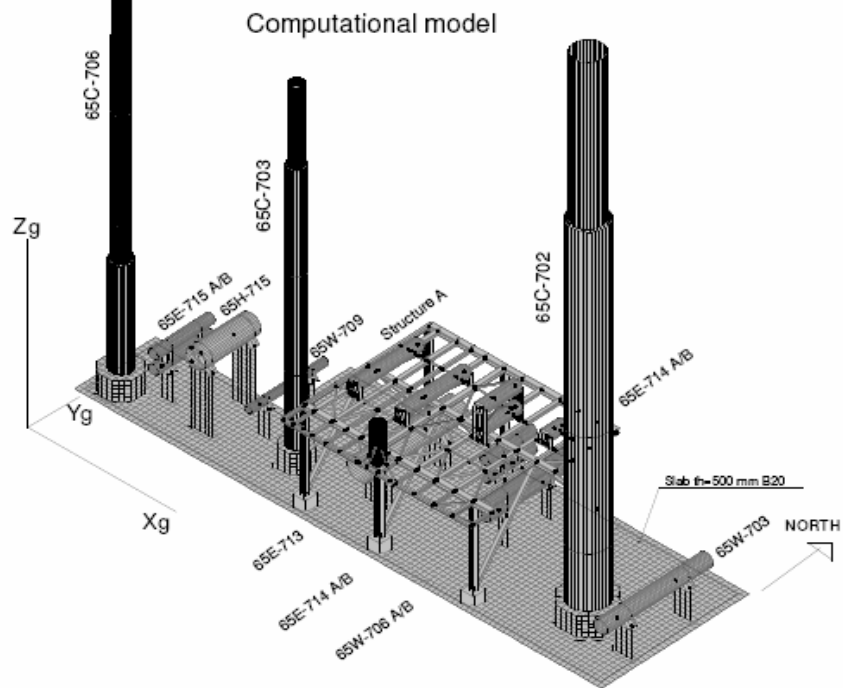
Overenie stability základu proti preklopeniu a pošmyknutiu na základe výpočtov MKP je možné prakticky dvomi spôsobmi.

V prípade, že program poskytuje výslednice pôsobiacich síl včítane ich polohy, je potrebné prepočítať účinky výsledníc s ohľadom na ťažisko kontaktnej plochy a ďalej postupovať ako pri stabilite plošného základu.

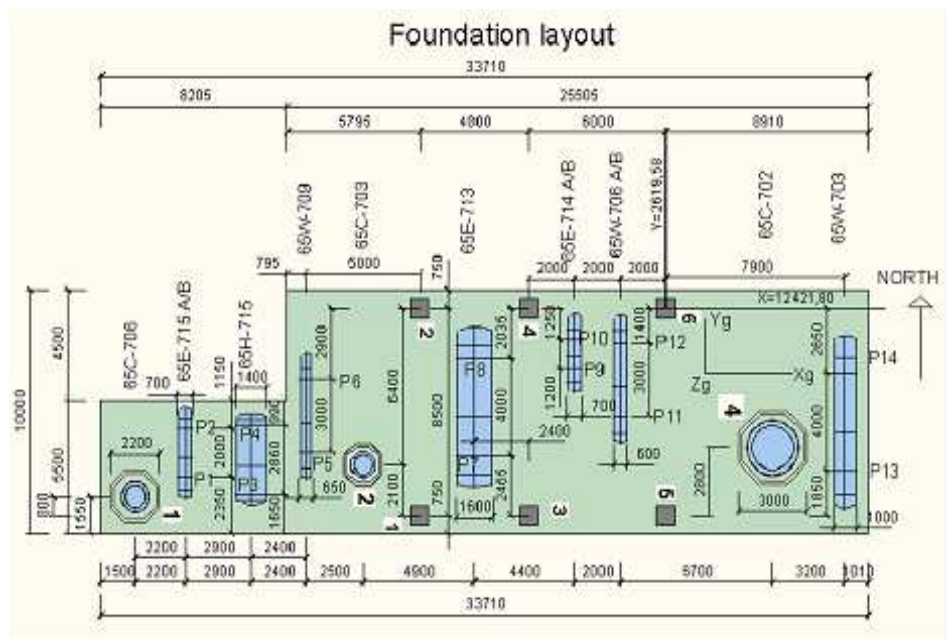
Samozrejme základy nemajú iba tvar štvorca, obdĺžnika alebo kruhu.

Kontaktná plocha je často daná aj dispozičnými nárokmi. Pri kontaktnej ploche všeobecného tvaru je vhodné postupovať analógiou

s prierezom, nájsť hlavné osy zotrvačnosti a k nim príslušné vzdialenosti od okrajov a tieto považovať za šírku základu. Ani tento postup nie je úplne v poriadku, nerešpektuje možnú rozdielnu tuhosť základu, výsledky overenia dávajú aspoň podklad pre rozhodnutie statika o stabilite.



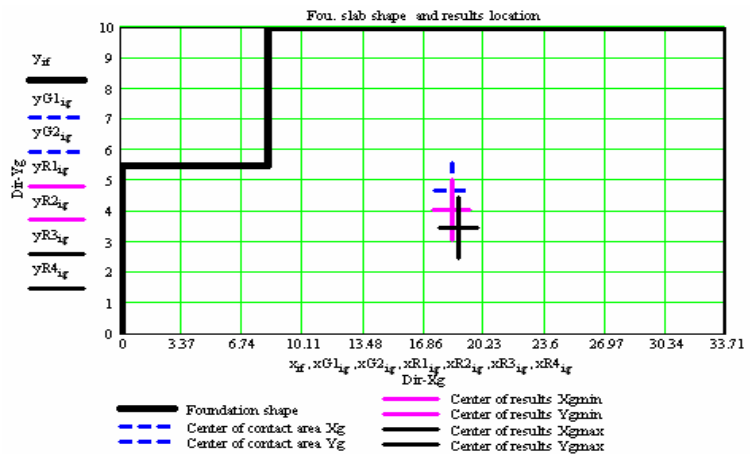
Obr. 35 Výpočtový model technologickej jednotky



Obr. 36 Základ technologickej jednotky



Vo veľkej väčšine programov MKP výslednice pôsobiaceho zaťaženia a ich poloha nie sú súčasťou výstupných údajov, aj keď ich výpočet voči náročnosti iných algoritmov je úplne jednoduchou záležitosťou. V tomto prípade je možné postupovať zo síl pôsobiacich v kotevných bodoch konštrukcií. Výsledné účinky k ťažisku kontaktnej plochy je možné vypočítať samostatne. Postup je potom ďalej analogický s postupom opísaným v predchádzajúcom



Obr.37 Polohy výsledníc a ťažiska základu

odstavci. Výsledky takéhoto riešenia získaného v prostredí programu MathCad 2001 sú na Obr. 37.

#### 4 KONŠTRUKCIE ZAŤAŽENÉ DYNAMICKÝMI ÚČINKAMI

Pri riešení konštrukcií zaťažnými dynamickými účinkami je potrebné overiť približnými metódami vlastné kmitanie konštrukcie, dynamické účinky v úrovni základov prípadne v častiach konštrukcie. Základnými parametrami, ktoré je možné ľahko skontrolovať je hmotnosť sústavy. Tuhosť sústavy je možné stanoviť na základe jednotkových deformácií. Pri zložitých konštrukciách treba vodorovné posuny resp. sily nechať pôsobiť v miestach, kde nedôjde k lokálnej deformácii prvku. Sily od jednotkových deformácií alebo posuny od jednotkových síl je možné získať vo výsledniciach reakcií.

Vlastné tvary a vlastné frekvencie s vysokým podielom na celkovej dynamickej odozve konštrukcie sú spravidla najnižšími frekvenciami. Podiel vlastných tvarov na dynamickej odozve konštrukcie nie je závislý od budenia a je v rôznych formách súčasťou výstupu programov. Prvú vlastnú frekvenciu s vysokým podielom na odozve je pre mnohé konštrukcie možné

$$f_{01} := 11.6 \cdot \frac{\sqrt{d_0}}{h} \quad T_{UBC} := 0.0731324 \cdot h^{\frac{3}{4}}$$

$$f_{d1} := \frac{33}{h} \quad f_{d1} := \frac{55}{h} \quad f_{np1} := \frac{10}{np}$$

h - výška budovy  
 np - počet podlaží výškovej budovy  
 do - menší rozmer pôdorysu budovy

Obr.38 Približné vzorce pre výpočet prvej vlastnej frekvencie pre výškové budovy

riešiť na základe vzorcov pre jednohmotové sústavy.

Napríklad pre výškové budovy existuje množstvo približných vzorcov pre výpočet prvej vlastnej frekvencie [8]. Pre jednoduché konštrukcie konzoly, nosníky s rôznym rozložením hmoty je množstvo publikácií o dynamike konštrukcií, kde sú uvedené vzorce. Významnou publikáciou, často citovanou v zahraničnej literatúre, je publikácia [12]

Pri výpočte základov strojov a zariadení je potrebné overiť vlastné frekvencie základu pre základné pohyby. Overenie frekvencií je možné na základe vzorcov uvádzaných v normách navrhovania, ktoré zahŕňajú aj vplyv podložia.

## **5 ZÁVER**

Problematika overovania výsledkov výpočtov MKP, ktorou sa zaoberá aj tento príspevok, vo výraznej miere umožní predísť problémom pri realizácii konštrukcií. Na druhej strane aj zo strany tvorcov programov je potrebné, okrem výsledkov potrebných pre posúdenie konštrukcie, venovať pozornosť aj výsledkom potrebným pre uľahčenie overenia pôsobenia konštrukcie. K týmto výsledkom nesporne patria výslednice zaťažovacích síl pôsobiacich na konštrukciu včítane ich polohy, výsledné celkové hmotnosti konštrukcie včítane ťažiska sústavy. Vhodným údajom by bolo hlavne pri plošných základoch ťažisko kontaktných plôch.

## **LITERATÚRA**

- [1] Manuály k programu NEXIS 32.70
- [2] Klaus-Jurgen Bathe : Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982
- [3] Edward L. Wilson : Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA (2002)
- [4] Anil K. Chopra.: Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 2/E, Prentice Hall , 2001
- [5] Z. Bittnar, P.Řeřicha : Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí, SNTL Praha 1981
- [6] Arnold Verruijt Soil Dynamics, Delft University of Technology 1994, 2004
- [7] Ray W. Clough, Joseph Penzien : Dynamics of structures,
- [8] Kol. autorov : Dynamika stavebních konstrukcí, T.P. 33, SNTL, Praha 1989
- [9] Suresh C.Arya, Michael W . O'Neill, George Pincuse : Design of structures and Foundations for Vibrating Machines, Gulf Publishing Company Houston, London, Paris McGraw-Hill, Inc., Second Edition , New York ,1993
- [10] Uniform Building Code 1997, ICBO 1997
- [11] Barkan D.D. Dynamics of bases and foundations. New York : McGraw-Hill 1962 (Preklad z ruštiny)
- [12] Roark's Formulas for Stress and Strain , by Warren C. Young and Richard Budynas McGraw-Hill 2001